

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντιστηρ. ασκήσεις #5, Δεκ. 2015, Θέμα: Διαν. Χώροι, ΙΙ

1. Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύνολο διανυσμάτων

$$\{x = (a^2, 0, 1), y = (0, a, 2), z = (1, 0, 1)\}$$

αποτελεί βάση του \mathbb{R}^3 .

2. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο των 3×3 διαγωνίων πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ και να προσδιοριστεί μια βάση του.

3. Να προσδιοριστεί μία βάση και η διάσταση του υποχώρου V του \mathbb{R}^4 , όπου

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = a - b, d = a + b\}$$

4. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 . Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο \mathbb{R} -υπόχωρος V του \mathbb{R}^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (1, 2, 3, 4), \vec{e}_2 = (-2, 1, \lambda, 2), \vec{e}_3 = (3, 1, 1, 2)$$

έχει τη μικρότερη διάσταση.

5. Βρείτε μια βάση και ένα ευθύ συμπλήρωμα των επομένων υποχώρων του $\mathbb{R}_3[x]$

$$V = \{f(x) \mid f(0) = 0\}.$$

$$W = \{f(x) \mid f(x)' = 0\}.$$

$$T = \{f(x) \mid f(x) = f(-x)\}.$$

6. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α') Η διάσταση του υποχώρου

$$V = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0, x + y + 2z = 0, 2x + y + z = 0\}$$

του \mathbb{R}^3 είναι 2.

(β') Αν A είναι ένας 5×3 πραγματικός πίνακας τότε τα διανύσματα του \mathbb{R}^3 που αντιστοιχούν στις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

7. Στον \mathbb{R}^3 θεωρούμε τους υποχώρους του

$$V = \langle (1, 2, 1), (2, 2, -2), (1, 3, 3) \rangle$$

$$W = \langle (1, 2, 2), (2, 2, -6), (2, 3, -1) \rangle.$$

Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W, V + W$.
Ισχύει ότι $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$;